ΘΕΜΑ 1ο

A) 1. $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$

4. $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$

2. $\lim_{x\to 2} f(x) =$ δεν υπάρχει

5. $\lim_{x\to -3} f(x)$: δεν ορίζεται.

3. $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$

(5μ)

B) 1. ΛΑΘΟΣ
2. ΛΑΘΟΣ
3. ΣΩΣΤΟ
4. ΛΑΘΟΣ
5. ΣΩΣΤΟ
6. ΛΑΘΟΣ
7. ΛΑΘΟΣ
8. ΛΑΘΟΣ
9. ΛΑΘΟΣ
10. ΛΑΘΟΣ

(10μ)

ΘΕΜΑ 2ο

A) 1. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+\frac{3}{2})}{x\cancel{(x-1)}} = 5$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1+x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left[\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} + \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\right] = 5$

3. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-3x+2}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{(x-1)(x+1)} - \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-1)}\right)$

$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{2}$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$

5. $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|+|x+1|+x}{|x-1|+|x|} = \frac{0+4+3}{2+3} = \frac{7}{5}$

6. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}^2-4)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}^2-9)\cdot(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(18μ)

B) 1. $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ άρα $\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \end{cases}$

• $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(ax+b) = 2a+b$ άρα $\boxed{2a+b=3}$ (1)

• $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2+5b) = 4a+5b$ άρα $\boxed{4a+5b=3}$ (2)

Απο (1),(2) $\Rightarrow$ $\boxed{a=2}$ και $\boxed{b=-1}$ (4μ)

2. α) $\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}(ax+b) = \lim_{x\to 7}(2x-1) = 13$

β) $\lim_{x\to -6} f(x) = \lim_{x\to -6}(ax^2+5b) = \lim_{x\to -6}(2x^2-5) = 67$ (3μ)

ΘΕΜΑ 3ο

A) 1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x)(\sqrt[3]{1-x}^2+\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}^2)}{(\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x})(\sqrt[3]{1-x}^2+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x)(\sqrt[3]{1-x}^2+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}^2)}{\sqrt[3]{1-x}^3-\sqrt[3]{1+x}^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x+2)(\sqrt[3]{1-x}^2+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}^2)}{-2\cancel{x}} = -3$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+3}-2}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}\right] = A$$

► $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{3x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x+1}^2-2^2)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}^2-2^2)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{3x+1}+2)} = 3$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}^2-1^2)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}^2-2^2)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=2$$

Άρα το αρχικό όριο είναι: $A=2+3=5$

3. $\lim_{x\to2}\frac{|x-3|-|2x+1|+4}{|x^2-6x|+|x|-10}$, Για $x\to2$

$$\begin{cases} x-3<0: & |x-3|=-x+3 \\ 2x+1>0: & |2x+1|=2x+1 \\ x^2-6x<0: & |x^2-6x|=-x^2+6x \\ x>0: & |x|=x \end{cases}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-x+3-2x-1+4}{-x^2+6x+x-10}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-3x+6}{-x^2+7x-10}=\lim_{x\to2}\frac{-3\cancel{(x-2)}}{-\cancel{(x-2)}(x-5)}=-1$$

4. $\lim_{x\to2}\frac{|x^2-2x|+x^2-4}{x^2-2x}$

x		0		2	
x^2-2x	+	0	−	0	+

$$\lim_{x\to2^-}\frac{-x^2+2x+x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^-}\frac{2\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}}=1$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-2x+x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-2x-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+1)}{x\cancel{(x-2)}}=3$$

δεν υπάρχει το όριο

(16/1)

B) Ισχύει $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2x}{x-2}=1$, έστω $\boxed{g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-2}}$ (1) για $x\to2$ τότε $\lim_{x\to2}g(x)=1$

Από την (1) $\Rightarrow g(x)(x-2)=f(x)-2x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=g(x)(x-2)+2x}$ (*)

1. $\lim_{x\to2}f(x)\overset{(*)}{=}\lim_{x\to2}\left(g(x)(x-2)+2x\right)=1\cdot0+4=4$

2. $\lim_{x\to2}\frac{f(x)\cdot x-x^2-4}{x^2+x-6}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to2}\frac{g(x)(x-2)\cdot x+2x^2-x^2-4}{x^2+x-6}=$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{g(x)(x-2)x + (x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}[g(x)\cdot x + x+2]}{\cancel{(x-2)}(x+3)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2+4}{5} = \frac{6}{5}$$

3. $$\lim_{x\to 2} \frac{f^3(x)-64}{2f^2(x)-9f(x)+4} = \lim_{x\to 2} \frac{f^3(x)-4^3}{2f^2(x)-9f(x)+4} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(f(x)-4)}(f^2(x)+4f(x)+16)}{2\cancel{(f(x)-4)}(f(x)-\frac{1}{2})} \overset{(I)}{=} \frac{16+16+16}{8-1} = \frac{48}{7}$$ (9μ)

ΘΕΜΑ 4:

1. $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2+bx-4}{x-1} = 5$$

Έστω $\boxed{h(x) = \frac{ax^2+bx-4}{x-1}}$ (1) για $x\to 1^-$ τότε $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$

Απο την (1) $\Rightarrow h(x)(x-1) = ax^2+bx-4$ έτσι $\lim_{x\to 1^-}(h(x)(x-1)) = \lim_{x\to 1^-}(ax^2+bx-4)$
οπότε $5\cdot 0 = a+b-4 \Leftrightarrow \boxed{b=4-a}$ (2)

Έτσι το όριο $\lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2+(4-a)x-4}{x-1} = 5$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2-ax+4x-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax(x-1)+4(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(ax+4) = a+4$$

οπότε $a+4=5 \Leftrightarrow \boxed{a=1} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{b=3}$ (6μ)

2. Αφού θέλουμε το όριο για $x\to 0$ θα χρησιμοποιήσουμε τον κλάδο της συνάρτησης για $x<1$: $f(x) = \frac{ax^2+bx-4}{x-1} \Leftrightarrow$
$$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4$$

άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|(x+4)^2-16|+2|x+4|-8}{x^2+x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2+8x|+2|x+4|-8}{x^2+x}$ $\quad \dfrac{\text{Για } x\to 0}{x+4>0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2+8x|+2x+8-8}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2+8x|+2x}{x^2+x}$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+8x+2x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}(x+10)}{\cancel{x}(x+1)} = 10$

x		-8		0	
x^2+8x	$+$	0	$-$	0	$+$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2-8x+2x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(-x-6)}{\cancel{x}(x+1)} = -6$

Αφού τα πλευρικά είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το όριο. (7μ)

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{3(\sqrt{x}-1)}{x-1} + \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right]$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{3}{2}$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{1}{4}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{4}{7} \neq 5 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

οπότε η $f(x)$ δεν έχει όριο στο $x=1$. (6μ)

4. Έστω $K(x) = \dfrac{g(x)}{x^2-16}$ για $x\to -4$ τότε $K(x)(x^2-16) = g(x)$ με $\lim\limits_{x\to -4} K(x) = \dfrac{-21}{4}$

Η $f(x)$ για $x<1$ από το (ii) είναι $f(x) = x+4$

Έτσι $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{K(x)(x-4)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = -\dfrac{21}{4}\cdot(-8) = 42$.

(6μ)